

Eesti LXX matemaatikaolümpiaad
TALLINNA KOOLIVOOR
12. jaanuaril 2023. a. Tallinnas
X klass

Lahendamiseks on aega 4 tundi.

Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti.

Taskuarvutit kasutada ei lubata.

1. Juku ja Mari mängivad mängu, kus Mari kirjutab Juku eest varjatult ringjoonele arvud $a_1, a_2, \dots, a_{2023}$, mis kõik on kas väärtusega 1 või -1 , ning ütleb Jukule korrutiste $a_1 \cdot a_2 \cdot a_3$, $a_2 \cdot a_3 \cdot a_4$, $a_3 \cdot a_4 \cdot a_5$, ..., $a_{2021} \cdot a_{2022} \cdot a_{2023}$, $a_{2022} \cdot a_{2023} \cdot a_1$ ja $a_{2023} \cdot a_1 \cdot a_2$ väärtused. Kas Jukul on nende andmete põhjal võimalik leida korrutise $a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_{2022} \cdot a_{2023}$ väärtust? Põhjendage oma vastust.
2. Sellelsinatsel 1438. aasta jüripäeva hommikul ärkas apteeker Melchior üles selle peale, et ukse taga kolkis Pirita kloostri aednik, vend Bent, kes tuli teatega, et pärast vesprit hakkasid kloostri abtiss Kandisel kohutavad kõhuvalud ning kahtlustatakse mürgitamiskatset. Melchioril paluti viivitamatult Piritale asja uurima tulla. Melchior pani oma pambud kokku ja hakkas jalgsi Pirita kloostri poole, kuhu oli üks pikk miil maad, kiiresti astuma. Esimesed 3300 jalga läbis Melchior 10 minutiga. Seejärel sai ta teel kokku samuti Pirita kloostrisse teel oleva palveränduriga, kellega vesteldes langes Melchiori kiirus 10 protsenti. Pärast üheskoos kõnnitud 20 minutit möödus neist pühadele õdedele küünlaid viiv vanker, mille juht otsustas rändurid peale võtta. Vankriga liikusid nad kolm korda kiiremini kui Melchior üksi jala käies oleks liikunud, ning veerand tunni pärast oldigi Pirita kloostris. Mitu jalga oli 1 pikk miil?
3. Nullist erinevate arvude a, b, c, x, y ja z korral on teada, et
$$a = \frac{xy}{x+y}, \quad b = \frac{yz}{y+z} \quad \text{ja} \quad c = \frac{zx}{z+x}.$$
 Leidke arvudest a, b ja c sõltuvad avaldised A ja B nii, et
$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{A}{B}.$$
4. Nelinurga $ABCD$ külge AD on risti külgedega AB ja CD . Diagonaal BD pikkusega a meetrit jaotab selle nelinurga kaheks sarnaseks ja võrdhaarseks, kuid mitte võrdseks kolmnurgaks.
 - 1) Leidke nelinurga $ABCD$ pindala.
 - 2) Näidake, et kolmnurga BCD ümberringjoone keskpunkt asub kolmnurga ABD ümberringjoonel.
5. Kotis on 2022 münti. Katrin ja Diana mängivad mängu, kus nad teevad kordamööda käike. Oma käigu ajal võtab Katrin kotist välja 5, 7 või 9 münti. Diana paneb oma käigu ajal tagasi kotti kas 2 või 3 münti. Katrin võidab juhul, kui peale tema käiku jääb kotti vähem kui 10 münti. Diana võidab, kui mingil mängu hetkel jääb kotti 100-ga jaguv müntide arv. Kellel on võidustrateegia (ehk õige strateegia puhul võidab igal juhul, olenemata sellest, kuidas käib vastane), kui mängu alustab Katrin?